グループの結合.
最初のコードの操作で並び替えが完了するまで最小値が変わらないような任意の2つのグループ(配列 W の部分配列)g_1, g_2 は各グループの任意の要素同士を入れ替えることで結合することができる．g_1, g_2 の結合にかかる最小のコストは各グループの最小要素同士の入れ替えで $\min(g_1) + \min(g_2)$ です.

二つのグループを結合しないほうがコストが少ないことの証明.
配列 W 全体の最小値を含まない2つのグループを結合しないほうがコストが少なくなることを示します．最初のコードの操作で並び替えが完了するまで最小値が変わらないような2つのグループ(W の部分配列)g_1, g_2 の並べ替えコストを考えます．グループの要素の最小値が小さい方を g_1 とします．あるグループ g に配列 W 全体の最小要素を加えて並び替える場合のコストは,

$$\min(W)(\mathrm{len}(g) + 1) + \min(g) + \mathrm{sum}(g) \tag{1}$$

(1) より g_1, g_2 を結合せずに並び替える場合のコストは，$\min(g_1) < \min(g_2)$ に注意すれば

$$\min(W)(\mathrm{len}(g_1)+1)+\min(g_1)+\mathrm{sum}(g_1)+\min(W)(\mathrm{len}(g_2)+1)+\min(g_2)+\mathrm{sum}(g_2) \tag{2}$$

最小要素を追加しない場合の方がコストが小さくなることはありますが，この式よりコストが大きくなることはありません.

g_1, g_2 を結合してから並び替える場合のコストは,

$$\min(g_1)+\min(g_2)+\min(W)(\mathrm{len}(g_1)+\mathrm{len}(g_2)+1)+\min(g_1)+\mathrm{sum}(g_1)+\mathrm{sum}(g_2) \tag{3}$$

(結合してから並べ替える場合のコスト) - (結合せずに並び替える場合のコスト)，すなわち (2) - (1) を考えると,

$$\min(g_1) - \min(W) \tag{4}$$

$\min(g_1) > \min(W)$ なので (4) が負の値を取ることはなく，結合せずに並び替えたほうがコストが少なくなります.

次に，g_1, g_2 に配列 W 全体の最小要素を加えずに結合するとコストが大きくなること示します．g_1, g_2 を結合せずに並び替える場合のコストは最小要素を追加する場合としない場合の最小値を取るので以下の 4 通りです.

パターン 1．g_1: 最小要素を追加，g_2: 最小要素を追加
パターン 2．g_1: 最小要素を追加，g_2: 最小要素を追加しない
パターン 3．g_1: 最小要素を追加しない，g_2: 最小要素を追加
パターン 4．g_1: 最小要素を追加しない，g_2: 最小要素を追加しない

証明のためにどのような場合に最小要素を追加したほうがコストが少なくなるかを考えます．あるグループ g を配列 W 全体の最小要素を加えずに並び替える場合のコストは

$$(\mathrm{len}(g) - 1)\min(g) + \mathrm{sum}(g) - \min(g) \tag{5}$$

配列 W 全体の最小要素を加えて並び替える場合のコストは式 (1) であったので，あるグループ g に関して (1)-(5) を考えると，

$$(\mathrm{len}(g) + 1)(\min(W) - \min(g)) + 4\min(g) \tag{6}$$

式 (6) から 最小要素を加えたほうがコストが少なくなる場合の条件式は

$$(\mathrm{len}(g) + 1)(\min(W) - \min(g)) + 4\min(g) < 0 \tag{7}$$

最小要素を加えないほうがコストが少なくなる場合の条件式は

$$(\mathrm{len}(g) + 1)(\min(g) - \min(W)) - 4\min(g) < 0 \tag{8}$$

また (5) より g_1, g_2 を結合して並び替える場合にかかるコストは,

$$(\mathrm{len}(g_1) + \mathrm{len}(g_2) - 1)\min(g_1) + \mathrm{sum}(g_1) + \mathrm{sum}(g_2) - \min(g_1) \tag{9}$$

証明の下準備が整ったので，全パターンで (結合しなかった場合のコスト) – (結合した場合のコスト) < 0 になることを示すことで異なるグループを結合する交換を行わないほうがコストが少なくなることを示します.

パターン 1
(結合しなかった場合のコスト) – (結合した場合のコスト) < 0 になることを示します．結合しない場合に g_1, g_2 の並び替えにかかるコストは，式 (1)． 結合する場合のコストは式 (9) なので示すべき式は,

$$(\mathrm{len}(g_1) + \mathrm{len}(g_2) + 2)(\min(W) - \min(g_1)) + 4\min(g1) < 0$$
$$\{(\mathrm{len}(g_1) + 1)(\min(W) - \min(g_1)) + 4\min(g_1)\} + (\mathrm{len}(g_2 + 1))(\min(W) - \min(g_1)) < 0$$

第 1 項は最小要素を加えたほうがコストが少なくなる場合の条件式 (7) より負，第 2 項は $\mathrm{len}(g_2+1) > 0$ かつ $\min(W) - \min(g_1) < 0$ なので負．よって，パターン 1 では (結合しなかった場合のコスト) − (結合した場合のコスト) < 0 であることが示せました．

パターン 2

(結合しなかった場合のコスト) − (結合した場合のコスト) < 0 になることを示します．結合しない場合に g_1, g_2 の並び替えにかかるコストは，g_1 に対して式 (1)，g_2 に対しては式 (5)． 結合する場合のコストは式 (9) なので示すべき式は，

$$\begin{gathered}\min(W)(\mathrm{len}(g_1)+1) + \min(g_2)(\mathrm{len}(g_2)+1) \\ -\min(g_1)(\mathrm{len}(g_1)+\mathrm{len}(g_2)+2) + 4\min(g_1) - 4\min(g_2) < 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{len}(g_1)+1)(\min(W)-\min(g_1)) + 4\min(g_1) \\ +(\mathrm{len}(g_2)+1)(\min(g_2)-\min(g_1))) - 4\min(g_2) < 0\end{gathered}$$

第 3 項に関して $\min(g_1) < \min(W)$ なので代わりに以下の式を示してもよいです．

$$\begin{gathered}\{(\mathrm{len}(g_1)+1)(\min(W)-\min(g_1)) + 4\min(g_1)\} \\ +\{(\mathrm{len}(g_2)+1)(\min(g_2)-\min(W))) - 4\min(g_2)\} < 0\end{gathered}$$

第 1 項は最小要素を加えたほうがコストが少なくなる場合の条件式 (7) より負，第 2 項は最小要素を加えないほうがコストが少なくなる場合の条件式 (8) より負．よって，パターン 2 では (結合しなかった場合のコスト) − (結合した場合のコスト) < 0 であることが示せました．

パターン 3

(結合しなかった場合のコスト) − (結合した場合のコスト) < 0 になることを示します．結合しない場合に g_1, g_2 の並び替えにかかるコストは，g_1 に対して式 (5)，g_2 に対しては式 (1)． 結合する場合のコストは式 (9) なので示すべき式は，

$$\begin{aligned}\min(W)(\mathrm{len}(g_2)+1) + \min(g_1)(\mathrm{len}(g_1)+1) - \min(g_1)(\mathrm{len}(g_1)+\mathrm{len}(g_2)+2) &< 0 \\ \min(W)(\mathrm{len}(g_2)+1) - \min(g_1)(\mathrm{len}(g_2)+1) &< 0 \\ (\mathrm{len}(g_2)+1)(\min(W)-\min(g_1)) &< 0\end{aligned}$$

$\min(W) - \min(g_1)$ なので左辺は負です．よって，パターン 3 では (結合しなかった場合のコスト) − (結合した場合のコスト) < 0 であることが示せました．

パターン 4
(結合しなかった場合のコスト) − (結合した場合のコスト) < 0 になることを示します．結合しない場合に g_1, g_2 の並び替えにかかるコストは，式 (5)． 結合する場合のコストは式 (9) なので示すべき式は,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{len}(g_1)+1)\min(g_1) + (\mathrm{len}(g2)+1)\min(g_2) - (\mathrm{len}(g_1)+\mathrm{len}(g_2)+2)\min(g_1) - 4\min(g_2) < 0 \\
(\mathrm{len}(g2)+1)(\min(g_2) - \min(g_1)) - 4\min(g_2) < 0
\end{aligned}
$$

第 1 項に関して，$\min(g_1) < \min(W)$ なので, 代わりに以下の式を示してもよいです．

$$
(\mathrm{len}(g2)+1)(\min(g_2) - \min(W)) - 4\min(g_2) < 0
$$

最小要素を加えないほうがコストが少なくなる場合の条件式 (8) より左辺は負．よって，パターン 4 では (結合しなかった場合のコスト) − (結合した場合のコスト) < 0 であることが示せました．

すべてのパターンにおいて結合しない方がコストが少なくなることが示せました．

□

以上の証明より別グループの任意の要素同士の交換は結合になるため，別グループの要素同士の交換は行わないほうがコストが少なくなることが分かります．(配列 W 全体の最小値を除く)